第35卷 第3期 厦门大学学报(自然科学版) Vol. 35 No. 3
1996年5月 Journal of Xiamen University (Natural Science) May 1996

一类非正性Lupas-Kantorovich型算子的点态逼近特征①

林 鹭 陈文忠
(数学系)

摘要 利用Polyá基函数系和三对角线无穷方阵,构造一类非正性Lupas-Kantorovich型算子,并给出其点态逼近特征.

关键词 基函数,无穷方阵,逼近特征
中国图书分类号 O 174.41

设$\alpha\geqslant 0$,$x\geqslant 0$和$n\in N$,$k=0,1,2,\cdots$,记$b_n^{(\alpha)}(x)=(b_{n,0}^{(\alpha)}(x),b_{n,1}^{(\alpha)}(x),\cdots,b_{n,k}^{(\alpha)}(x),\cdots)$,其中

$$b_{n,k}^{(\alpha)}(x)=\begin{cases}\begin{pmatrix}\frac{n}{\alpha}+k-1\\ k\end{pmatrix}(\alpha x)^k(1+\alpha x)^{-\frac{n}{\alpha}-k} & (\alpha>0)\\ e^{-nx}\dfrac{(nx)^k}{k!} & (\alpha=0)\end{cases}$$

这里约定$\begin{pmatrix}\frac{n}{\alpha}+k-1\\ k\end{pmatrix}=\dfrac{\Gamma(\frac{n}{\alpha}+k)}{k!\ \Gamma(\frac{n}{\alpha})}(\alpha>0)$,$k=0,1,2,\cdots$,并称向量$b_n^{(\alpha)}(x)$为Polyá基向量,又对$f\in L[0,+\infty)$,令$L_{n,k}(f)=n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\mathrm{d}t$;$k=0,1,2,\cdots$. 记$L_n(f)=(L_{n,0}(f),L_{n,1}(f),\cdots,L_{n,k}(f),\cdots)^T$. 取三对角线无穷方阵

$$A=\begin{pmatrix}a_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots\\ c_1 & a_1 & b_1 & 0 & \cdots\\ 0 & c_2 & a_2 & b_2 & \cdots\\ 0 & 0 & c_3 & a_3 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots\end{pmatrix}$$

构造线性算子$L_n^{(\alpha)}$:对$f\in L[0,+\infty)$和$x\geqslant 0$,有$L_n^{(\alpha)}(f,x)=b_n^{(\alpha)}(x)AL_n(f)=\sum_{k=0}^{\infty}(c_kL_{n,k-1}(f)+a_kL_{n,k}(f)+b_kL_{n,k+1}(f))b_{n,k}^{(\alpha)}(x)$,这里约定$c_0=0$,$L_{n,-1}(f)=0$. 适当选取无穷方阵$A$,使得对$n\in N$和$x\geqslant 0$,有$L_n^{(\alpha)}(1,x)=1$和$L_n^{(\alpha)}(t,x)=x$.

① 本文1995-03-06收到; 国家自然科学基金资助项目

由计算得到. $L_n^{(\alpha)}(1,x)=\sum_{k=0}^{\infty}(c_k+a_k+b_k)b_{n,k}^{(\alpha)}(x)$, $L_n^{(\alpha)}(t,x)=x+\frac{1}{2n}[(a_0+3b_0)b_{n,0}^{(\alpha)}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+3b_k-c_k)b_{n,k}^{(\alpha)}(x)]$. 因此

$$L_n^{(\alpha)}(1,x)=1\Leftrightarrow\begin{cases}a_0+b_0=1\\ c_k+a_k+b_k=1 \quad (k\geqslant 1)\end{cases}$$

$$L_n^{(\alpha)}(t,x)=x\Leftrightarrow\begin{cases}a_0+3b_0=0\\ a_k+3b_k-c_k=0 \quad (k\geqslant 1)\end{cases}$$

即 $a_0=\frac{3}{2}, b_0=-\frac{1}{2}$ 和 $\begin{cases}a_k+2b_k=\frac{1}{2}\\ b_k-c_k=-\frac{1}{2}\end{cases} \quad (k\geqslant 1)$

若选取 $\frac{1}{2}\leqslant c_k\leqslant\frac{3}{4}(k\geqslant 1)$, 则有 $0\leqslant b_k\leqslant\frac{1}{4}$ 和 $0\leqslant a_k\leqslant\frac{1}{2}$ $(k\geqslant 1)$. 注意到线性算子 $L_n^{(\alpha)}$ 并非正性的. 但 $L_n^{(\alpha)}(t^2,x)=x^2+\frac{x(1+\alpha x)}{n}+\frac{1}{n^2}[\frac{1}{3}-b_{n,0}^{(\alpha)}(x)+2\sum_{k=0}^{\infty}b_kb_{n,k}^{(\alpha)}(x)]$. 于是对上面选取的 a_k, b_k 和 $c_k(k\geqslant 0)$, 有

$$L_n^{(\alpha)}((t-x)^2,x)-\frac{x(1+\alpha x)}{n}=L_n^{(\alpha)}(t^2,x)-x^2-\frac{x(1+\alpha x)}{n}$$
$$=\frac{1}{n^2}[\frac{1}{3}-b_{n,0}^{(\alpha)}(x)+2\sum_{k=1}^{\infty}b_kb_{n,k}^{(\alpha)}(x)]$$

因为对 $n\in N, x\geqslant 0$, 有

$$-\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2}(\frac{1}{3}-b_{n,0}^{(\alpha)}(x)+2\sum_{k=0}^{\infty}b_kb_{n,k}^{(\alpha)}(x))<\frac{1}{n^2}$$

所以 $\left|L_n^{(\alpha)}((t-x)^2,x)-\frac{x(1+\alpha x)}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$ 或 $L_n^{(\alpha)}((t-x)^2,x)=\frac{x(1+\alpha x)}{n}+o(\frac{1}{n})$.

本文称线性算子 $L_n^{(\alpha)}$ 为非正性 Lupas-Kantorovich 型算子, 并研究其点态逼近特征.

1 基本引理

引理 1 设 $f\in L_p[0,+\infty)(p\geqslant 1)$ 或 $f\in C_\infty[0,+\infty)=C[0,\infty),\infty)\cap L_\infty[0,\infty)$, $\varphi(x)=\sqrt{x(1+\alpha x)}(\alpha\geqslant 0)$, 则有

i) $\|L_n^{(\alpha)}(f)\|_p\leqslant M\|f\|_p$

ii) $\|L_n^{(\alpha)''}(f)\|_p\leqslant Mn^2\|f\|_p$

iii) $\|\varphi^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}L_n^{(\alpha)}(f)\|_p\leqslant Mn\|f\|_p$

其中 M 是与 n 无关的正常数.

证 首先注意到, 对 $f\in C_B[0,\infty)$, 有 $|L_{n,k}(f)|\leqslant\|f\|_\infty$, 由此导出 $\|L_n^{(\alpha)}(f)\|_\infty\leqslant\sup_{k\geqslant 0}(|c_k|+|a_k|+|b_k|)\|f\|_\infty=2\frac{3}{4}\|f\|_\infty$. 对 $f\in L_1[0,\infty)$, 有

$$|L_{n,k}(f)|=n\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|f|\mathrm{d}t\right|\leqslant n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|f(t)|\mathrm{d}t$$

和

$$|L_{n,k-1}(f)|+|L_{n,k}(f)|+|L_{n,k+1}(f)|\leqslant n\left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|f|\mathrm{d}t+\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|f|\mathrm{d}t\right]=n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k+2}{n}}|f|\mathrm{d}t$$

从而有

$$\|L_n^{(\alpha)}(f)\|_1\leqslant\left\|\sum_{k=0}^{\infty}(|c_k\|L_{n,k-1}(f)|+|a_k\|L_{n,k}(f)|+|b_k\|L_{n,k+1}(f)|)b_{n,k}^{(\alpha)}(x)\right\|_1$$

$$\leqslant\sup_{k\geqslant 0}(|a_k|,|b_k|,|c_k|)3\frac{n}{n-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|f|\mathrm{d}t\leqslant M\|f\|_1$$

于是根据 Riesz-Thorin 定理.对 $f\in L_p[0,\infty)(1\leqslant p\leqslant+\infty)$ 有 $\|L_n^{(\alpha)}(f)\|_p\leqslant M\|f\|_p$

其次,记 $d_{n,k}(f)=c_kL_{n,k-1}(f)+a_kL_{n,k}(f)+b_kL_{n,k+1}(f)$,则对 $x\geqslant 0$,有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}L_n^{(\alpha)}(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty}d_{n,k}(f)b^{(\alpha)\prime\prime}{}_{n,k}(x)$$

$$=n(n-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}(d_{n,k}(f)-2d_{n,k+1}(f)+d_{n,k+2}(f))b_{n-2\alpha,k}^{(\alpha)}(x)$$

注意到

$$|d_{n,k}(f)|\leqslant\begin{cases}M\|f\|_\infty & f\in C_\infty[0,\infty)\\ Mn\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k+2}{n}}|f|\mathrm{d}t & f\in L_1[0,\infty)\end{cases}$$

所以对 $f\in C_B[0,\infty)$,有 $\|L_n{}^{(\alpha)\prime\prime}(f)\|_\infty\leqslant Mn^2\|f\|_\infty$,和对 $f\in L_1[0,\infty)$ 有 $\|L_n{}^{(\alpha)\prime\prime}(f)\|_1\leqslant Mn^2\|f\|_1$. 于是根据 Riesz-Thorin 定理,对 $f\in L_p[0,\infty)(p\geqslant 1)$ 有 $\|L_n{}^{(\alpha)\prime\prime}(f)\|_p\leqslant Mn^2\|f\|_p$.

最后,由直接计算得到,对 $x\geqslant 0$,有

$$L_n{}^{(\alpha)\prime\prime}(f,x)=\frac{n^2}{[x(1+\alpha x)]^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{k}{n}-x\right)^2-\frac{x(1+\alpha x)}{n}-\left(\frac{k}{n}-x\right)\frac{1+2\alpha x}{n}\right]d_{n,k}(f)b_{n,k}^{(\alpha)}(x)$$

所以对 $f\in C_B[0,\infty)$,有

$$|x(1+\alpha x)L_n{}^{(\alpha)\prime\prime}(f,x)|$$

$$\leqslant M\|f\|_\infty\frac{n^2}{x(1+\alpha x)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{k}{n}-x\right)^2+\frac{2\alpha x^2}{n}+\beta_{n,k}(x)\right)b_{n,k}^{(\alpha)}(x)$$

其中 $\beta_{n,k}(x)=\frac{x(1+\alpha x)}{n}+\left(\frac{k}{n}-x\right)\frac{1+2\alpha x}{n}$,从而导出

$$|\varphi^2(x)L_n{}^{(\alpha)\prime\prime}(f,x)|\leqslant M\|f\|_\infty\frac{n^2}{\varphi^2(x)}\left[\frac{\varphi^2(x)}{n}+\frac{2\alpha x^2}{n}+\frac{\varphi^2(x)}{n}\right]$$

$$\leqslant M\|f\|_\infty\frac{n^2}{\varphi^2(x)}\frac{4\varphi^2(x)}{n}=4Mn\|f\|_\infty$$

又记 $E_n=[\frac{\theta}{n},\infty)$,仿照 Ditzian-Totik 的证明,有

$$\int_{E_n}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{2m}b_{n,k}^{(\alpha)}(x)\left(\frac{k}{n}-x\right)^{2m}\mathrm{d}x\leqslant cn^{-m-1}$$

所以

$$\|\varphi^2L^{(\alpha)\prime\prime}{}_n(f)\|_1\leqslant\int_0^\infty\frac{n^2}{\varphi^2(x)}\sum_{k=0}^{\infty}|d_{n,k}(f)|\left[\left(\frac{k}{n}-x\right)^2+\frac{2\alpha x^2}{n}+\frac{x(1+\alpha x)}{n}\right.$$

$$+ (\frac{k}{n}-x)\frac{1+2\alpha x}{n}]b_{n,k}^{(\alpha)}(x)\mathrm{d}x$$
$$\triangleq I_1 + I_2$$

其中 $$I_1=\int_0^{\frac{\theta}{n}}\frac{n^2}{\varphi^2(x)}\sum_{k=0}^{\infty}|d_{n,k}(f)|[(\frac{k}{n}-x)^2+\frac{2\alpha x^2}{n}+\frac{x(1+\alpha x)}{n}+(\frac{k}{n}-x)\frac{1+2\alpha x}{n}]b_{n,k}^{(\alpha)}(x)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \sup_{k\geqslant 0}|d_{n,k}(f)|\int_0^{\frac{\theta}{n}}\frac{n^2}{\varphi^2(x)}\frac{4\varphi^2(x)}{n}\mathrm{d}x\leqslant Mn\|f\|_1$$

和 $$I_2=n^2\int_{\frac{\theta}{n}}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|d_{n,k}(f)|[(\frac{k}{n}-x)^2+\frac{2\alpha x}{n}+\frac{x(1+\alpha x)}{n}+(\frac{k}{n}-x)\frac{1+2\alpha x}{n}]\frac{b_{n,k}^{(\alpha)}(x)}{\varphi^2(x)}\mathrm{d}x$$
$$\leqslant n^2\sum_{k=0}^{\infty}|d_{n,k}(f)|[\int_{\frac{\theta}{n}}^{\infty}\frac{(\frac{k}{n}-x)^2}{\varphi^2(x)}b_{n,k}^{(\alpha)}(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\theta}{n}}^{\infty}\frac{3}{n}b_{n,k}^{(\alpha)}(x)\mathrm{d}x$$
$$+\frac{1}{n}\int_{\frac{\theta}{n}}^{\infty}\frac{1+2\alpha x}{\sqrt{x(1+\alpha x)}}\frac{|\frac{k}{n}-x|}{\varphi(x)}b_{n,k}^{(\alpha)}(x)\mathrm{d}x]$$

由于 $$\sup_{x\in[\frac{\theta}{n},\infty)}\frac{1+2\alpha x}{\sqrt{x(1+\alpha x)}}=\frac{1+2\alpha\frac{\theta}{n}}{\sqrt{\frac{\theta}{n}(1+\alpha\frac{\theta}{n})}}\leqslant M\sqrt{n}$$

和 $$\int_{\frac{\theta}{n}}^{\infty}\frac{|\frac{k}{n}-x|}{\varphi(x)}b_{n,k}^{(\alpha)}(x)\mathrm{d}x\leqslant\left[\int_{\frac{\theta}{n}}^{\infty}\frac{(\frac{k}{n}-x)^2}{\varphi(x)^2}b_{n,k}^{(\alpha)}(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}(\int_0^{\infty}b_{n,k}^{(\alpha)}(x)\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}\leqslant Mn^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

所以 $$I_2\leqslant n^2\sum_{k=0}^{\infty}|d_{n,k}(f)|[Mn^{-2}+Mn^{-2}+Mn^{-2}]\leqslant Mn\|f\|_1$$

由此,对 $f\in L_1[0,\infty)$,有 $\|\varphi^2L_n^{(\alpha)''}(f)\|_1\leqslant Mn\|f\|_1$. 根据 Riesz-Thorin 定理,对 $f\in L_p[0,\infty)(P\geqslant 1)$,有

$$\|\varphi^2L_n^{(\alpha)''}(f)\|_p\leqslant Mn\|f\|_p$$

引理 2 设 $f\in[0,\infty)$ 且 $f'\in AC_{loc}$, $\varphi^2f''\in C_B[0,\infty)$,则有

i) $\|L_n^{(\alpha)''}(f)\|_\infty\leqslant M\|f''\|_\infty$, ii) $\|\varphi^2L_n^{(\alpha)''}(f)\|_\infty\leqslant M\|\varphi^2f''\|_\infty$

证 由于对 $x\geqslant 0$,有

$$L_n^{(\alpha)''}(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{d}_{n,k}(f)b_{n,k}^{(\alpha)''}(x)$$
$$=n(n-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}[d_{n,k+2}(f)-2d_{n,k+1}(f)+(d_{n,k}(f)]b_{n-2\alpha,k}^{(\alpha)}(x)$$

记 $\Delta L_{n,k}(f)=L_{n,k+1}(f)-L_{n,k}(f)$, $\Delta^2L_{n,k}(f)=L_{n,k+2}(f)-2L_{n,k+1}(f)+L_{n,k}(f)$. 注意到 $c_0=0$, $a_0=\frac{3}{2}$, $b_0=-\frac{1}{2}$, $a_k+b_k+c_k=1$, $a_k+3b_k-c_k=0(k\geqslant 1)$,有

$$L_n^{(\alpha)''}(f,x)=n^2\sum_{k=0}^{\infty}[\frac{1}{2}\Delta^2L_{n,k-1}(f)+\frac{1}{2}\Delta^2L_{n,k}(f)+b_{k+2}\Delta^2L_{n,k+1}(f)$$
$$+b_k\Delta^2L_{n,k-1}(f)-2b_{k+1}\Delta^2L_{n,k}(f)]b_{n-2\alpha,k}^{(\alpha)}(x)$$

由于对 $f' \in AC_{loc}$ 且 $\varphi^2 f'' \in C_B[0,\infty)$，有

$$\Delta^2 L_{n,k}(f) = L_{n,k+2}(f) - 2L_{n,k+1}(f) + L_{n,k}(f) = n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left[\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}} f''(t+u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}t$$

因此，对 $f' \in AC_{loc}$ 且 $\varphi^2 f'' \in C_\infty[0,\infty)$，有 $|\Delta^2 L_{n,k}(f)| \leqslant \frac{1}{n^2}\|f''\|_\infty$，从而 $\|L_n^{(\alpha)''}(f)\|_\infty \leqslant M\|f''\|_\infty$. 其次，对 $f' \in AC_{loc}$ 且 $\varphi^2 f'' \in C_\infty[0,\infty)$，有

$$\begin{aligned}|\Delta^2 L_{n,k}(f)| &\leqslant n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}|f''(t+u+v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v]\mathrm{d}t \\ &\leqslant \|\varphi^2 f''\|_\infty n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(t+u+v)(1+\alpha(t+u+v))}\mathrm{d}t \\ &\leqslant \|\varphi^2 f''\|_\infty n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{M}{n^2}\frac{\mathrm{d}t}{\varphi^2(t+\frac{2}{n})} \leqslant M\|\varphi^2 f''\|_\infty \frac{1}{(k+2)(n+\alpha(k+2))}\end{aligned}$$

于是对 $x \geqslant 0$，有

$$|L_n^{(\alpha)''}(f,x)| \leqslant M\|\varphi^2 f''\|_\infty n(n-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_{n-2\alpha,k}^{(\alpha)}(x)}{(k+2)[n+\alpha(k+2)]}$$

或

$$|\varphi^2(x)L_n^{(\alpha)''}(f,x)| \leqslant M\|\varphi^2 f''\|_\infty n(n-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^2(x)b_{n-2\alpha,k}^{(\alpha)}(x)}{(k+2)(n+\alpha(k+2))}$$

由于 $\varphi^2(x)b_{n-2\alpha,k}^{(\alpha)}(x) = \frac{k+1}{(n-3\alpha)(n-4\alpha)}(n+(k-3)\alpha)b_{n-4\alpha,k+1}^{(\alpha)}(x)$，所以对 $x \geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}|\varphi^2(x)L_n^{(\alpha)''}(f,x)| &\leqslant M\|\varphi^2 f''\|_\infty\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{k+2}\cdot\frac{n(n-\alpha)}{(n-3\alpha)(n-4\alpha)} \\ &\quad\cdot\frac{n+(k-3)\alpha}{n+(k+2)\alpha}b_{n-4\alpha,k+1}^{(\alpha)}(x) \leqslant M\|\varphi^2 f''\|_\infty \qquad (n > 4\alpha)\end{aligned}$$

记 $U_B = \{g \mid g \in C_B[0,\infty)$ 且 $g'' \in C_B[0,\infty)\}$，我们有

引理 3　设 $g \in U_B$，则对 $x \geqslant 0$，有

$$|L_n^{(\alpha)}(g,x) - g(x)| \leqslant \frac{3}{2}\|g''\|\left(\frac{x(1+\alpha x)}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

证　因为 $g \in U_B$，由 Taylor 展开式，对 x、$t \geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}|L_n^{(\alpha)}(g,x) - g(x)| &= \left|L_n^{(\alpha)}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)\mathrm{d}u, x\right)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sup_{k\geqslant 0}(|a_k|,|b_k|,|c_k|)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=-1}^{1}L_{n,k+j}((t-x)^2)b_{n,k}^{(\alpha)}(x)\|g''\|_\infty \\ &\leqslant \frac{3}{2}\|g''\|_\infty\left(\frac{x(1+\alpha x)}{n} + \frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

2　点态逼近等价定理

利用引理 1 ～ 3 的结论，有如下点态逼近等价定理.

定理 1　设 $\alpha \geqslant 0$，$0 < \beta < 2$ 和 $f \in C_B[0,\infty)$，则如下命题等价：

i) 对 $x \geqslant 0$，有 $|L_n^{(\alpha)}(f,x) - f(x)| \leqslant M\left(\frac{x(1+\alpha x)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{\beta}{2}}$，

ii) $f \in \mathrm{Lip}^*\beta$ 或 $\omega_2(f,t) = O(t^\beta)$；$(t > 0)$.

证 ii)⇒i) 对 $x \geqslant 0$ 和 $\forall g \in C_B$,有

$$|L_n^{(\alpha)}(f,x) - f(x)| \leqslant |L_n^{(\alpha)}(f-g,x)| + |f(x)-g(x)| + |L_n^{(\alpha)}(g,x) - g(x)|$$
$$\leqslant 2\|f-g\|_\infty + M(\frac{x(1+\alpha x)}{n} + \frac{1}{n^2})\|g''\|_\infty$$

即 $|L_n^{(\alpha)}(f,x) - f(x)| \leqslant MK_2(f,\sqrt{\frac{x(1+\alpha x)}{n}+\frac{1}{n^2}}) \sim \omega_2(f,\sqrt{\frac{x(1+\alpha x)}{n}+\frac{1}{n^2}})) \leqslant M(\frac{x(1+\alpha x)}{n}+\frac{1}{n^2})^{\frac{\beta}{2}}$,其中$K$-泛函:$K_2(f,t) = \inf\limits_{g\in U_B}\{\|f-g\|_\infty + t^2\|g''\|_\infty\} \sim \omega_2(f,t)$.

i)⇒ii) 设 $0 < h \leqslant t < \frac{1}{8}, x \geqslant 0, x \pm h \in [0,\infty)$ 和 $\varphi(x) = \sqrt{x(1+\alpha x)}, d_n(x,h) = \max(\frac{1}{n},\frac{\varphi(x+2h)}{\sqrt{n}})$,则有

$$|\Delta_h^2 f(x)| \leqslant |\Delta_h^2[f(x) - L_n^{(\alpha)}(f,x)]| + |\Delta_h^2 L_n^{\alpha}(f,x)|$$
$$\leqslant 8Md_n(x,h)^\beta + \int_0^h\int_0^h |L_n^{(\alpha)''}(f,x+u+v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

又设 f_d 是 f 的二阶 Steklov 平均,则 $f_d \in U_B$,且

$$\|f - f_d\|_\infty \leqslant 2\omega_2(f,d),\ \|f''_d\|_\infty \leqslant 2\frac{\omega_2(f,d)}{d^2}$$

因而,有

$$\int_0^h\int_0^h |L_n^{(\alpha)''}(f,x+u+v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$\leqslant \int_0^h\int_0^h |L_n^{(\alpha)''}(f-f_d,x+u+v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v \int_0^h\int_0^h |L_n^{(\alpha)''}(f_d,x+u+v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$\leqslant Mh^2\|f''_d\|_\infty + \min\{n^2h^2, n\int_0^h\int_0^h \varphi^{-2}(x+u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\}\|f-f_d\|_\infty$$

注意到 $\int_0^h\int_0^h \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(x+u+v)(1+\alpha(u+v))} \leqslant M_\alpha h^2 \frac{1}{(x+2h)(1+\alpha(x+2h))}$,其中 $M_\alpha = 4\max(9,6(1+3\alpha))$,所以

$$|\Delta_h^2(f,x)|$$
$$\leqslant M[d_n(x,h)^\beta + h^2d^{-2}\omega_2(f,d) + \min(n^2\frac{n}{(x+2h)[1+\alpha(x+2h)]}h^2\omega_2(f,d)]$$

取 $d = d_n(x,h)$,由上式导出

$$|\Delta_h^2 f(x)| \leqslant M[d_n(x,h)^\beta + \omega_2(f,d_n(x,h))(\frac{h}{d_n(x,h)})^2]$$

由于对固定 x,h 有 $d_n(x,h) \to 0\ (n \to +\infty)$ 且

$$d_n(x,h) \leqslant d_{n-1}(x,h) \leqslant 2d_n(x,h)$$

又对 $0 < \delta < \frac{1}{8}$,存在 $n \in N$ 使得 $dn(x,h) \leqslant \delta < 2dn(x,h)$,因而导出

$$|\Delta_h^2 f(x)| \leqslant M(\delta^\beta + (\frac{h}{\delta})^2\omega_2(f,\delta))$$

或 $\omega_2(f,h) \leqslant M(\delta^\infty + (\frac{h}{\delta})^2\omega_2(f,\delta))$. 根据 Lorentz-Hermann 引理得到 $f \in \mathrm{Lip}^*\beta$.

4 对偶逼近等价定理

设 $f \in C_B[0,\infty), \varphi(x) = \sqrt{x(1+\alpha x)}$,通称 $\omega_\varphi(f,\delta) = \sup\limits_{\substack{0\leqslant h\leqslant\delta \\ x\in[0,+\infty)}} |\Delta_{h\varphi(x)}^2 f(x)|$ 为 f 的修正

光滑模，V. Totik 证明，对 $0 < h < \frac{1}{2}$，如下命题是等价的：

i) $\omega_\varphi(f,h) \leqslant Mh^\beta$,　ii) $\varphi(x)^\beta |\Delta_h^2 f(x)| \leqslant Mh^\beta, x \in [h, +\infty)$

其中 $0 < \beta < 2$.

下面给出对偶逼近等价定理.

定理 2　设 $f \in C_B[0,\infty)$，$0 < \beta < 2$，则如下命题是等价的：

i) $\| L_n^{(\alpha)}(f) - f \|_\infty = O(n^{-\frac{\beta}{2}})$

ii) $\omega_\varphi(f,h) = O(h^\beta)$　　$(h > 0)$

其中 $\varphi(x) = \sqrt{x(1+\alpha x)}$，$(\alpha \geqslant 0)$.

根据 V. Totik 的定理，要证明上述结论，只需建立如下引理.

引理 4　设 $f \in C_B[0,\infty)$，则对 $x \in [0,\infty)$，有

$$\varphi^2(x) |L_n^{(\alpha)''}(f,x)| \leqslant 4n \| f \|_\infty$$

证　对 $x \in (0,\infty)$，有 $b_{n,k}^{(\alpha)''}(x) = (\frac{n}{x(1+\alpha x)})^2 r_{n,k}(x) b_{n,k}^{(\alpha)}(x)$，其中 $r_{n,k}(x) = (\frac{k}{n} - x)^2 - \frac{x(1+\alpha x)}{n} - (\frac{k}{n} - x)\frac{1+2\alpha x}{n}$，易证

$$|r_{n,k}(x)| \leqslant (\frac{k}{n} - x)^2 + \frac{2\alpha x^2}{n} + \frac{x(1+\alpha x)}{n} + (\frac{k}{n} - x)\frac{1+2\alpha x}{n}$$

所以对 $x \in [0,\infty)$，有

$$|L_n^{(\alpha)''}(f,x)| \leqslant (\frac{n}{x(1+\alpha x)})^2 \sum_{k=0}^{\infty} |r_{n,k}(x)| b_{n,k}^{(\alpha)}(x) \| f \|_\infty \leqslant 4 \| f \|_\infty \frac{n}{x(1+\alpha x)}$$

即对 $x \in [0,\infty)$，有 $|\varphi^2(x) L_n^{(\alpha)''}(f,x)| \leqslant 4n \| f \|_\infty$.

参 考 文 献

1　Chen Wenzhong. On the approximation by the mixed exponential type integral operators. *Approx. Th & its Appl.*，1989，5(2)：9～24

2　陈文忠. 算子逼近论. 厦门：厦门大学出版社，1989

3　Ditzian Z，Totik V. *Moduli of Smoothness*，Berlin. New york：Springer Verlag，1987

4　Totik V. An interpolation theorem and its applications to positive operators. *Pacific. J. Math.*，1984，111：447～481

Pointwise Approximation Characterization for a Class of Nonpositive Lupas-Kantorovich Operators

Lin Lu　　Chen Wenzhong

(*Dept. of Math.*)

Abstract　A class of nonpositive Lupas-Kantorovich type operators is formed by Polyá basic function system and by tridiagonal infinite matrix，and its pointwise approximation characterization is obtained.

Key words　Basic function，Infinite matrix，Approximation characterization